代数幾何学シンポジウム記録
1978年度 pp.1-15

Abel's theorem and webs −Griffithsの最近の仕事−

名大工 加藤芳文

種数πのcompact Riemann面Cから、projective spaceへのgenericに1:1の正則写像

$$f: C \longrightarrow \mathbb{P}^n$$

で、image $f(C)$の次数がdになった時、このpairのことをd次のalgebraic curveと呼ぶことにする。ただし$f(C)$がhyperplaneに含まれたり、より次元の高いprojective spaceからのprojectionにはなっていないと仮定する。また簡単のために$f(C)$もCと書く。

このようなCが与えられた時、dual projective space $\mathbb{P}^{n*}$の元ξに対し

$$\xi \cdot C = p_1(\xi) + \cdots + p_d(\xi)$$

と書くと、古典的なアーベルの定理は次のよ

うに言い表わすことができる。

Theorem.

C上のholomorphic 1-form ωに対し

$$1)\ \sum_{i=1}^{d}\int_{P_0}^{P_i(\zeta)}\omega \equiv K\ (\text{定数})\ \text{on}\ \mathbb{P}^{n*}$$

が成立する。ただし $P_0\in C$ はfix。

あるいは上の式の両辺を微分して

$$2)\ \omega(P_1(\zeta))+\omega(P_2(\zeta))+\cdots+\omega(P_d(\zeta))\equiv 0.$$

Example.

$$C=\{(1,x,y)\in\mathbb{P}^2 \mid y^2-p(x)=0\}$$

ただし $p(x)=(x-\lambda_1)(x-\lambda_2)(x-\lambda_3)$

$$\lambda_i\neq\lambda_j \quad \text{for } i\neq j$$

この時、Cはelliptic curveとなり、1-formとして $\omega=\frac{dx}{y}=\frac{dx}{\sqrt{p(x)}}$ を取ればelliptic integral

$$u(P)=\int_{P_0}^{P}\omega=\int_{P_0}^{P}\frac{dx}{\sqrt{p(x)}},$$

を得る。特に P_0 としてCの変曲点をとれば、

$u = \int_{P_0}^{P(u)} \omega = \int_{P_0}^{(x(u),\, y(u))} \omega$ と逆に解くことによりCのuniversal coveringの座標関数uを得る。この時x(u)はWeierstrassのペー関数になりωの取り方と2)より次のような よく知られた関係式が出てくる。

1) $\begin{vmatrix} 1, & x(u_1), & y(u_1) \\ 1, & x(u_2), & y(u_2) \\ 1, & x(u_3), & y(u_3) \end{vmatrix} = 0 \iff u_1 + u_2 + u_3 = 0$ (mod Lattice),

2) $x'(u) = y(u)$,

3) $(x'(u))^2 = p(x(u))$.

AbelのTheoremは今から150年程前に発表されたものだが現代のしてんから見れば次のように簡単に証明される。

$C^{[d]} = C^d/\sim$ をCのd個の対称積とする。1-form $\sum_{i=1}^{d} \pi_i^* \omega$ は置換に対して不変であるから$C^{[d]}$上のformと考えられる。

一方写像

~~$F: \mathbb{P}$~~

$$\begin{array}{rccc} \Gamma : & \mathbb{P}^{n*} & \longrightarrow & C^{[d]} \\ & \xi & \longmapsto & p_1(\xi) + \cdots + p_d(\xi) \end{array}$$

に対し、$\Gamma^*\left(\sum_{i=1}^{d} \pi_i^* \omega\right) = \omega(p_1(\xi)) + \cdots + \omega(p_d(\xi))$ を考えると、$\mathbb{P}^{n*}$上のhol-1-formに成ることが言えるが、$\mathbb{P}^{n*}$上には恒等的に0になるもの以外には存在しないから2)が~~言え~~でる。

d次のcurve Cがあると$\mathbb{P}^{n*}$内のopen set上に$\{\xi \mid p_i(\xi) = \text{一定}\} = 1$点$p_i(\xi)$を通るhyperplane全体$\cong \mathbb{P}^{n-1}$をleafとするfoliationが入る。$\omega$を点$p_i(\xi)$の回りで$f_i(x)\,dx_i$と書いて置けば2)は $\sum_{i=1}^{d} f_i(p_i(\xi))\,dx_i(p_i(\xi)) \equiv 0$ という形にかけ、abel equationと呼ばれる。

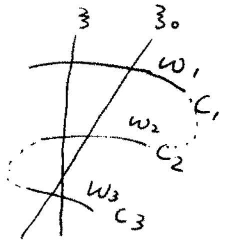
AbelのTheoremの逆として次のLieのTheoremがある。ただしこのように一般の形で述べたのはGriffithsの[1]が最初である。

LieのTheorem.

$\mathbb{P}^n$内にanalytic curveのgerm $C_1, C_2, \cdots, C_d$があり、各C_i上にl ocalな1-form ω_iが与えられていたとする。その時ある$\xi_0 \in \mathbb{P}^{n*}$の近傍の点$\xi$に対し

1) $C_i \cdot \xi = P_i(\xi)$

$$\sum_{i=1}^{d} \omega_i(P_i(\xi)) \equiv 0$$



を満たしていれば、次数dのalgebraic curve Cとその上のglobalな1-form ωで次の条件を満たすものが存在する。

2) $C \supset C_i$ for any i

$\omega|_{C_i} = \omega_i$

この定理を用いてfoliationに付随した、abel equationとCastelnuovoのboundとが関係していることを以下説明する。

先ず

Castelnuovo's bound

$\pi(d,n) = \mathbb{P}^n$内にあるd次のalgebraic curveの種数の最大値

$$\leqq \left[m\left(d - \frac{1}{2}(m+1)(n-1) - 1 \right) \right]$$

ただし　$m = \left[\dfrac{d-1}{n-1} \right]$

が成り立つ。等号の成立するcurveのことをextremal curveといい確かに存在する。特に$\pi(n,n) = 0$となり、rational normal curveという。

上のboundを実際に出して見よう。

$$\begin{tikzcd} L = f^*H \arrow[d] & H \arrow[d] \\ f : C \arrow[r] & \mathbb{P}^n \end{tikzcd}$$

Lemma　$d \geqq n$が常に成り立つ。

∵) exact列

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}(L-p) \longrightarrow \mathcal{O}(L) \longrightarrow \mathbb{C}_p \longrightarrow 0$$

より　$n+1 \leqq h^0(L) \leqq h^0(L-p) + 1$ となり後はinductionを使え。

Lemma.

rest : $H^0(\mathbb{P}^n, \mathcal{O}(H^k)) \to H^0(C, \mathcal{O}(L^k))$

に対し、そのimageをV_kとする。その時

$$\dim V_k - \dim V_{k-1} = \begin{cases} \geq k(n-1)+1 & \text{if } k \leq \left[\frac{d-1}{n-1}\right] \\ = d & \text{if } k > \left[\frac{d-1}{n-1}\right] \end{cases}$$

∵) $\xi \in \mathbb{P}^{n*}$をgenericに取り

$\xi \cdot C = P_1 + \cdots + P_d$ で各P_iはgeneral positionにあるとする。

そして次のように$k+1$個の組に分ける。

$$\underbrace{P_1, \cdots P_{n-1}}_{D_1}; \underbrace{P_n, \cdots\cdots P_{2(n-1)}}_{D_2}; \cdots\cdots; \underbrace{P_{k(n-2)+1} \cdots, P_{k(n-1)}}_{D_k}; \underbrace{\cdots P_d}_{\text{残り}}$$

$\xi_i \in \mathbb{P}^{n*}$として$D_i$を通るが$P_d$は通らない元を選ぶ。そして$h = \xi_1 \times \cdots\cdots \times \xi_k$と置けばこれは$P_1$ $\cdots, P_{k(n-1)}$を通るがP_dは通らない次数kの多項式である。h''として任意の次数$k-1$のhypersurfaceをとり$h' = \xi \times h''$と置けば、各P_iをすべて通りしかも次数はkになる。よってV_kには$h + h'$の形をした少なくとも$k(n-1)+1+\dim V_{k-1}$個の独立なhypersurfaceがあることになる。後半も同様にして証明できる。

このLemmaを使うと

$$\dim V_{m+m'} \geq \frac{1}{2} m(m+1)(n-1) + m + 1 + m'd$$

となり、一方Riemann RochのTheoremより

$$h^0(L^{m+m'}) = \deg L^{m+m'} - \pi + i(L^{m+m'}) + 1$$

$$= d(m+m') - \pi + 1$$

$$\geqq \dim V_{m+m'} \geqq \frac{1}{2}m(m+1)(n-1) + m+1 + m'd$$

となる。ここでkが十分大ならば$i(L^k)=0$ となることを用いた。上の式を整頓すれば

$\pi \leqq \pi(d,n)$ が得られる。

$\mathbb{C}^n$内のopen set Uに対しintegrability condition $d\omega \wedge \omega = 0$を満たす$1$-form ωを与えることをcodim 1のfoliationの構造を入れるという。ωのintegral manifoldのことをleafという。従ってこのことはUに$du(x) = \rho(x)\,\omega(x)$ $(\rho(x) \neq 0)$ と満たす関数$u(x)$を与えることと同値である。$\omega(x)$のかわりに$\rho(x)\omega(x)$ $(\rho(x) \neq 0)$, $u(x)$のかわりに$U(x) = v(u(x))$ $(v'(u) \neq 0)$をとっても

leafは変わらないから$w(x)$は$\mathbb{P}(T_x^*)$の元を決めていると考えてよい。

Definition

U上にd個のcodim 1のfoliationを与えることをd-webという。ただしweb hypersurfaceはgeneral positionにあるとする。

$$du_{i_1}\wedge\cdots\wedge du_{i_k}\neq 0 \quad (k\leqq n)$$

Definition.

d-webがlinearizableとはUの座標変換で各hypersurfaceが一斉にhyperplaneにできることとする。特にparallelにできる時octahedralという。

Definition.

d-web $\{u_i(x)\}_{i=1}^d$に対し

$$\sum_{i=1}^d f_i(u_i(x))\,du_i(x)\equiv 0$$

と書いたものをabel equationという。一次独立なabel eqの最大

値をそのwebのrankという。

Remark.

Curveから決まったd-webはlinearizableでありrankはπ以上である。

さて次がGriffithsの得た主定理である。

Theorem

1) 任意のd-webに対し、

$\# \mathrm{rank} \leqq \pi(d, n)$ が成り立つ

2) 1)で等号が成り立つのはextremal curveから作ったd-webに限る。

1)の証明は先のCastelnuovo's boundの時と同様にして得られる。

r(=rank)個のabel equationをmatrixを使って書くと

$$
(du_1(x), \cdots, du_d(x)) \begin{pmatrix} f_1^1(u_1(x)), & \cdots, & f_1^r(u_1(x)) \\ \vdots & & \vdots \\ f_d^1(u_d(x)), & \cdots, & f_d^r(u_d(x)) \end{pmatrix} \equiv 0
$$

となる。$z_i(x) = [f_i^1(u_i(x)), \cdots, f_i^r(u_i(x))] \in \mathbb{P}^{r-1}$,
$u_{i\alpha} = \dfrac{\partial u_i}{\partial x_\alpha}$ とすると $\sum_{i=1}^{d} z_i(x) u_{i\alpha} \equiv 0$, $1 \leqq \alpha \leqq n$
とも書ける。

rank $\begin{pmatrix} u_{i\alpha} \end{pmatrix} = n$ だったことより次のmapが定義される。Poincaré mappingとも呼ばれる。

$$
\begin{array}{rccl}
F: & U & \longrightarrow & Gr(d-n-1, r-1) \\
 & \Downarrow & & \Downarrow \\
 & x & \longmapsto & \{z_1(x) \cdots z_d(x)\} = \left\{ \begin{array}{l} z_i(x) \text{ が } \mathbb{P}^{r-1} \text{ 内にはる} \\ \text{linear space} \end{array} \right\} \cong \mathbb{P}^{d-1}(x)
\end{array}
$$

$z_i(x)$ は x を動かすと $\mathbb{P}^{r-1}$ 内にanalytic curveのgerm C_i を作る。次のosculating spaceを考えよう。

$\mathbb{P}^{N(k)} = \{ z_1(x), \cdots z_d(x); z_1'(x), \cdots z_d'(x); \cdots; z_1^{(k)}(x), \cdots z_d^{(k)}(x) \}$,
$N(k)$ はkによって決まるlinear sp

ace の次元であり明らかに $\mathbb{P}^{N(0)}_{(x)} \subset \mathbb{P}^{N(1)}_{(x)} \subset \cdots \subset \mathbb{P}^{r-1}$ が成り立つ。

Lemma

$N(l) = N(l+1)$ が成り立てば $N(l) = r-1$ である。

∵) $\frac{\partial u_i}{\partial x_\alpha} \neq 0$ としたとき、$f_i^{\lambda,(k)}(u) = \frac{d^k f_i^{\lambda}(u)}{du^k}$ とおけば

$$\frac{\partial z_i^{k}(x)}{\partial x_\alpha} = \left[\frac{\partial f_i^{1,(k)}(u_i(x))}{\partial x_\alpha}, \cdots\cdots, \frac{\partial f_i^{r,(k)}(u_i(x))}{\partial x_\alpha}\right]$$

$$= \left[f_i^{1,(k+1)}(u_i(x)), \cdots\cdots, f_i^{r,(k+1)}(u_i(x))\right]$$

$$= z_i^{(k+1)}(x).$$

よって $N(l) = N(l+1)$ ならば $z_i^{(l+1)}$ は $\mathbb{P}^{N(l)}_{(x)}$ に入り任意の $z(x) \in \mathbb{P}^{N(l)}_{(x)}$ に対し $\frac{\partial z(x)}{\partial x_\alpha} \in \mathbb{P}^{N(l)}_{(x)}$ (α：任意) となるから、$\mathbb{P}^{N(l)}_{(x)}$ は x によらない。しかも C_i を含むから $\mathbb{P}^{N(l)}_{(x)} = \mathbb{P}^{r-1}$ でなければならない。

1 から d までの数字を次のように分割する。

$$1,\cdots,n-1;\ \underbrace{n,\cdots 2(n-1);\ \cdots\cdots;\ \underbrace{(m-1)(n-1)+1,\cdots m(n-1);\ \underbrace{m(n-1)+1,\cdots d-1,d}_{I_{m-1}}}_{I_{m-2}}}_{I_0}$$

abel の equation $\sum z_i(x)\, u_{i\alpha}(x) = 0$ に対し、$(u_1,\cdots,u_{n-1},u_d)$ を local coordinate と考えると

$z_n \frac{\partial u_n}{\partial u_d} + \cdots + z_{d-1} \frac{\partial u_{d-1}}{\partial u_d} + z_d = 0$ となる。よって z_d は $z_n, \cdots, z_{d-1}$ の一次結合で書ける。

故に $\mathbb{P}^{N(0)} = \{z_i(x) \; ; \; i \in I_0\}$

次に $(u_n, \cdots u_{2(n-1)}, u_d)$ を用いて上の式に $\frac{\partial}{\partial u_d}$ をほどこすと、

$$p_{2n-1} z'_{2n-1} + \cdots + p_{d-1} z'_{d-1} + z'_d \equiv 0 \mod \mathbb{P}^{N(0)}(x)$$

となる。よって $\mathbb{P}^{N(1)}(x) = \{z_i'(x) \; ; \; i \in I_1\} + \mathbb{P}^{N(0)}(x)$。

この操作を繰り返せば $k \leqq m-1$ に対して、

$$\mathbb{P}^{N(k)}(x) = \{z_i^{(k)}(x) \; ; \; i \in I_k\} + \mathbb{P}^{N(k-1)}(x)$$

となる。特に $N(k) \leqq N(k-1) + (d-1-(k+1)(n-1))$。

$\mathbb{P}^{(m-1)}(x) = \{z_i^{(m-1)}(x) \; ; \; i \in I_{m-1}\} + \mathbb{P}^{N(m-2)}(x)$ だから

$$z_d^{(m-1)}(x) \equiv \sum_{j \in I_{m-1}} \sigma_j z_j^{(m-1)}(x) \mod \mathbb{P}^{N(m-2)}(x)$$ とおいておき、$(u_i \; ; \; i \in I_{m-1} \; ; \; u_d)$ を local coordinate の一部としてとり $\frac{\partial}{\partial u_d}$ を operate すると、$z_d^{(m)}(x) \equiv 0 \mod \mathbb{P}^{N(m-1)}(x)$ となる。よって $N(m) = N(m-1)$ となる。Lemma より

$$r - 1 = N(m-1) \leqq m(d-1) - \sum_{k=1}^{m} k(n-1) - 1$$

従って $r \leqq \left[m(d-1) - \frac{1}{2} m(m+1)(n-1)\right] = \pi(d, n)$ となる。

さらにGriffithsは[3]の中で等号が成り立つd-webは一般にlinearizableであることを示した。このことを認めればTheoremの2)は次のようにして出る。Uのfoliationのつくるleafがlinear spaceだからそれらは$\mathbb{P}^{n*}$内にdコのanalytic curveのgerm $C_1, C_2, \cdots, C_d$を作りabel equationがLieのTheoremの1)に相当している。よってC_iはglobalな$\mathbb{P}^{n*}$内のcurveの一部分でありω_iはその上の1-formのC_iへの制限になっている。そのcurveがextremalであることは最~~逆~~初から等号が成り立つようにとったから当然である。

References

[1] P. A. Griffiths, Variations on a theorem of Abel, Inventiones math. 35, 321-390 (1976)

[2] P. A. Griffiths, On abel's differential equations, Algebraic geometry, the Johns Hopkins centennial Lectures, Jun-Ichi Igusa 編

[3] S. S. Chern, P. A. Griffiths, *Abel's theorem and webs*, Jber. d. Dt. Math.-Verein, 80(1978) 13-110,